Récurrence   Act 4

[a] Exercice suppl : "Montrer que

$$1^2+3^2+\dots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} \quad \forall n \geq 1"$$

① H.R. $1^2+3^2+\dots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ pour un certain n

② à dém : $1^2+3^2+\dots+(2n-1)^2+(2n+1)^2 \overset{?}{=} \frac{(n+1)(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}{3}$

$$=\frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$$ pour le même n

dém : $\underbrace{1^2+3^2+\dots+(2n-1)^2}_{H.R.}+(2n+1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}+(2n+1)^2$ [H.R.]

$$=\frac{n(2n-1)(2n+1)+3(2n+1)^2}{3}$$ [mettre au dénom. commun (amplification) + add fract.]

$$=\frac{(2n+1)[n(2n-1)+3(2n+1)]}{3}$$ [mise en év.]

$$=\frac{(2n+1)[2n^2-n+6n+3]}{3}$$ [développ.]

$$=\frac{(2n+1)[2n^2+5n+3]}{3}$$ [réduire]

$$=\frac{(2n+1)[(n+1)(2n+3)]}{3}$$ [factor.]

cqfd

③ $n=1$: $1^2 \overset{?}{=} \frac{1(2-1)(2+1)}{3} \Leftrightarrow 1 \overset{?}{=} \frac{3}{3}$ ok

b] Montrer que $2^n > 6n+7$, $\forall n \geq 6$

① H.R. $2^n > 6n+7$ pour un certain n

② à dém. : $2^{n+1} \overset{?}{>} 6(n+1)+7$ (pour le même n !)

dém. : $2^{n+1} = 2^n \cdot 2$ — on part de l'expr. de gauche — on fait apparaître l'expression de l'H.R.

$> (6n+7) \cdot 2$ — on utilise l'H.R.

il faut relier cette étape à l'expression de droite

a-t-on :

$(6n+7) \cdot 2 > 6(n+1)+7$

$\Leftrightarrow 12n+14 > 6n+13$

$\Leftrightarrow 6n > -1$ n positif, c'est vrai !

d'où $2^{n+1} > (6n+7) \cdot 2 > 6(n+1)+7$ cqfd

③ $n=6$ (ou $n=7$ dans l'énoncé du mini-test) :

$2^6 \overset{?}{>} 6 \cdot 6+7 \Leftrightarrow 64 \overset{?}{>} 43$ ok